

非可換ゲージ対称性を持つ 2次元共形場理論

名大理 浪川 幸彦 (Yukihiko Namikawa)

§ 0. 序

場の理論と代数幾何学、特に2次元共形場理論とリーマン面のモジュラス理論との関連については、近年ほぼその構造が明らかになった。それについては以前報告したこともあり[N2]、また本号でも清水勇二氏の報告がある筈なので、詳細はそちらに譲り、ここではその大要のみを記しておく。

学問の歴史において、全く場を異にした二つの大きな流れの間に、突如として太い通路(channel)が開け、深い相互関係が生じて、全体としてより大きな新しい流れの始まることがある。これもその典型といえよう。2次元共形場理論は元来2次元統計力学の相転移点に現われるものとして生まれた([BPZ])。一方リーマン面のモジュラス多様体の幾何学については Mumford, Harrisらによって、同じ頃研究が始められた([M2],[HM])。

これら元来は二つの別の流れを結び付けたのは弦模型理論である。Polyakovに始まるボゾン弦模型理論がリーマン面のモジュラス理論と関連を持つことが示され([BK])、次いで弦模型理論がモジュラス空間場のD-加群の理論として定式化されて([FS])、両者を結ぶチャンネルが確立された。

これによれば、場の理論の基本方程式が、モジュラス空間上の可積分系として表現される。この時作用する基本対称性によって対応するモジュラス空間が異なる：

座標変換	Virasoro代数	リーマン面のモジュラス空間
可換ゲージ変換	Heisenberg代数 (無限次元)	リーマン面上の直線束のモジュラス空間
非可換ゲージ変換	アフィン・リー代数	リーマン面上の主束のモジュラス空間。

場の理論としては通常、座標変換と(ある群を定めた)ゲージ変換とを併せたものを考える([KZ] Wess-Zumino モデル、あるいはWess-Zumino-Witten, Wess-Zumino-

-ベクトル束の変形としてとらえる。(gを随伴表現によるG-束と考えてもよい。)しかしその分記述が面倒になるので、ここでは以下その違いを無視することにする。

上で述べたことを要約すれば、Gが単純な場合は、変形に関する限り、主束の変形とg-束のそれとに違いは無く、大域的モジュラス空間としても有限的な違いが生じるのみである。

定義 (1. 1 1). 次のようなモジュラス関手を考える:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(G, R); \\ \mathcal{P}^{(n)} &= \mathcal{P}^{(n)}(G, R, Q, t^{(n)}) \\ \mathcal{P}^\wedge &= \mathcal{P}^\wedge(G, X). \end{aligned}$$

$\mathcal{P}^{(n)}$ は自然に射影系をなし、 \mathcal{P}^\wedge はその射影的極限と考えられる。

変形理論から次の事実が導かれる。

定理 (1. 1 2). 無限小変形空間 (モジュラス関手の接空間) は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad T_P \mathcal{P} &= H^1(R, \text{ad}(P)); \\ \text{ii)} \quad T_{(P, \sigma^{(n)})} \mathcal{P}^{(n)} &= H^1(R, \text{ad}(P)(-nQ)); \\ \text{iii)} \quad T_{(P, \sigma^\wedge)} \mathcal{P}^\wedge &= (\mathfrak{g} \otimes C[[\xi]]) / W, \end{aligned}$$

$$W = \sigma^\wedge(H^0(R, \text{ad}(P)(*Q)))$$

(= {Qにのみ極を持ち得る有理型切断の、枠 σ^\wedge を用いたローラン展開}) .

証明. 最初の二つの式は良く知られている。

iii) は、Qを中心とする小円板Dと $R^\circ = R - \{0\}$ による被覆 $\{R^\circ, D\}$ でii)のCechコホモロジーを計算すれば、

$$H^1(R, \text{ad}(P)(-nQ)) = \frac{H^0(D^\circ, \text{ad}(P))}{H^0(D, \text{ad}(P)(-nQ)) + H^0(R^\circ, \text{ad}(P))}$$

となることから分かる。ただしこうしたコホモロジーの計算で、Qでの切断の特異性を有理型のものに限っても結果が同じになる (一種のGAGA) 事実を用いる。

$$s^\wedge : E_0^\wedge \cong \mathfrak{g} \otimes \hat{O}$$

をいう。

ii) Q での n 次無限小 G -枠とは、リー代数としての同型 ($t^{(n)}$ と両立)

$$s^{(n)} : E_0 / m^n E_0 \cong \mathfrak{g} \otimes (\hat{O} / m^n)$$

をいう。

ここでも明らかに s は $s^{(n)}$ の射影的極限である。

命題 (1. 6). P を R 上の G -束とする。 P の Q での形式的 G -枠は、 P の随伴束 $ad(P) = P \times_G \mathfrak{g}$ の Q での形式的 \mathfrak{g} -枠を導く。

逆に G が連結なら、 $ad(P)$ の形式的枠は G のそれを導く。

n 次無限小枠についても同様である。

(1. 7) 我々は主束のかわりに \mathfrak{g} -束 (およびその枠構造) を考える。この両者には多少ずれがあるので、それを明確にしておかねばならない。このずれは \mathfrak{g} -束 $\leftrightarrow Ad(G)$ -束 $\leftrightarrow G$ -束と2段階に表わされる。

定理 (1. 8). \mathfrak{g} を単純とする。 \mathfrak{g} -束 E に対し、次の条件は同値である:

- 1) E は \mathfrak{g} -束として Zariski位相で局所自明である;
- 2) E はある $Ad(G)$ -束 ($Ad(G) = G/Z(G)$) の随伴束である;
- 3) E の構造群が $Ad(G) = Aut(\mathfrak{g})^\circ$ に帰着できる。

特に条件3) から、これが位相的条件であることが分かり、従ってこれは変形によって保たれる。

命題 (1. 9). G を単純と仮定する (G の中心 Z は有限群)。 $G' = Ad(G)$ と表わす。 G -束と、 G' -束との関係は、次の完全列によって表わされる:

$$0 \rightarrow H^1(R, Z) \rightarrow H^1(R, G) \rightarrow H^1(R, G') \rightarrow H^2(R, Z).$$

特にその違いは有限であり、変形によって不変である。

注意 (1. 10). 後者の差を復活させるためには、 G の忠実な表現を考えて、その G

(1. 13) モジュラス空間の存在については、次の事実がある：

事実. i) \square 主束にも安定性の概念が存在し、安定な主束のモジュラス空間（非特異、準射影的）が存在する；

ii) $\forall P$ に対し、 $\exists N$ s.t. $\forall n \geq N$ に対し、 $\mathcal{P}^{(n)}$ のモジュラス空間が $(P, \sigma^{(n)})$ の近傍で存在する；

iii) \mathcal{P}^\wedge の精密モジュラス空間が存在する。ただし \mathcal{P}^\wedge は可算型の概型（有限型概型の可算射影極限）になる（厳密に言うと、 \mathcal{P}^\wedge の代数性は、後に述べるグラスマン多様体を用いて初めて証明される）。

iv) $G(\mathcal{O}^\wedge)$ は枠の変換として \mathcal{P}^\wedge に作用する。安定主束のモジュラス空間 \mathcal{P} に制限すれば、 $\rho^\wedge : \mathcal{P}^\wedge \rightarrow \mathcal{P}$ は $G(\mathcal{O}^\wedge)$ -束になっている。（ $G(\mathcal{O}^\wedge)$ は可算型 C -群概型と考える。）

§ 2. 普遍グラスマン多様体と Krichever 写像

(2. 1) $\hat{K} = C((\zeta))$ に次のような（減少）フィルター構造を入れる：

$$F^p \hat{K} = \zeta^p C[[\zeta]].$$

特に $F^0 \hat{K} = \hat{\mathcal{O}} = C[[\zeta]]$, $F^1 \hat{K} = \hat{m}$ ($\hat{\mathcal{O}}$ の極大イデアル)。

より一般に、 V を有限次元 C -ベクトル空間とすると

$\hat{V} = V \otimes \hat{K}$ には

$$F^p \hat{V} = V \otimes F^p \hat{K}$$

により、フィルター構造が入る。 \hat{K} の \hat{V} への作用はフィルター構造を保つ：

$$F^p \hat{K} \times F^q \hat{V} \rightarrow F^{p+q} \hat{V}.$$

以下これらの記号は断わり無しに用いる。

定義 (2. 2). \hat{V} の部分空間 W が半無限 (semiinfinite) であるとは、自然な写像

$$j : W \rightarrow \hat{V} \rightarrow \hat{V} / F^0 \hat{V}$$

の Ker および Coker が \mathbb{C} 上有限次元になることをいう。

このとき $c(W) = \dim \text{Ker } j - \dim \text{Coker } j$ を W の指数(index) という。幾何では Euler 指標、物理では charge といわれることが多い。

定義 (2. 3) (佐藤幹夫[SN]) . \hat{V} の半無限部分空間全体に、自然に (無限次元) 複素多様体の構造が入り、これを普遍グラスマン多様体と呼ぶ:

$$\text{UGM} = \{W \subset \hat{V}; \text{半無限部分空間}\};$$

$$\text{UGM}^c = \{W \in \text{UGM}; c(W) = c\}.$$

UGM^c は連結成分になる。

普遍グラスマン多様体に対しては、有限次元の場合と平行した理論が展開され、特に Plücker 座標による無限次元射影空間への埋め込みがある。詳しくは[SN], [KNTY]を参照。

また自然に可算型 \mathbb{C} -概型の構造が入る (柏原[Ks]) 。

(2. 4) 理論の鍵になるアイデアは いわゆる Krichever 写像により、先の枠付モジュラス空間を UGM に埋め込むことである。次の再構成定理がその根拠を与える。

定理 (2. 5) . (1. 12) の記号を用いる。

$$\text{i) } W \in \text{UGM}^{(1-g)\dim g}(\mathfrak{g} \otimes \hat{K}).$$

$(P, \sigma^\wedge) \in \mathcal{P}^\wedge$ に W を対応させる写像 Γ を Krichever 写像と呼ぶ。これは正則写像になる。

ii) Γ の像は、 W がフィルター付 A -リー代数の意味で $\mathfrak{g} \otimes \hat{K}$ の部分代数になるものと一致する (A は (1. 1) 参照)。

iii) W により $(\text{ad}(P), \text{ad}(\sigma^\wedge))$ を再構成することができる。

したがって、 $(\text{Ad}(P), \sigma^\wedge)$ までは再構成できる。

証明. i) R についての Riemann-Roch の定理により容易に示される。

ii) この特徴付けの証明は、難しくはないが、やや面倒であるので略す。

iii) $\text{Spec}(A) = \mathbb{R}^\circ$ に注意すれば、 A -加群 W に対応する \mathbb{R}° 上の層 W^- は \mathbb{R}° 上の \mathfrak{g} -束になる (ここで \mathfrak{g} の rigidity が用いられる)。 Q での \mathfrak{g} -束の構造は

$$\mathcal{O}_Q(\text{ad}(P)) = K(R)W \cap F^0(\hat{\mathfrak{g}} \otimes \hat{K})$$

により定まる。($K(R)$ は R 上の有理型関数のなす代数関数体を表わす。)

注意 (2. 6) . 先に (1. 10) で述べたように、さらに G の忠実な表現をとってその随伴ベクトル束に対する Krichever 写像を考えることにより、 (P, σ^\wedge) は完全に再構成される。

再構成定理の証明をさらに精密にすることにより、次の系が得られる。

系 (2. 7) . Krichever 写像は閉埋め込みである。

注意 (2. 8) . グラスマン多様体の普遍族を Krichever 写像の像に制限することにより、 P^\wedge の接束の分解が得られる：

$$0 \rightarrow W \rightarrow \mathcal{O}_{P^\wedge} \otimes \hat{\mathfrak{g}} \otimes \hat{K} \xrightarrow{\theta} T_{P^\wedge} \rightarrow 0.$$

§ 3. 可積分表現に伴うゲージ理論

定義 (3. 1) . \mathfrak{g} を (有限次元) 複素リー代数とすると、 \mathfrak{g} に対応するアフィンリー代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ を次のように定義する：

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\zeta)) \oplus \mathbb{C}c,$$

$$[a \otimes f, b \otimes g] = [a, b] \otimes fg + ((a, b) \circ \text{Res}_{\zeta=0} g df) c$$

ただし、 $(a, b) \circ$ は、最大ルート θ の長さを 2 に正規化したキリング形式。

定理・定義 (3. 2) . さらに \mathfrak{g} を半単純とする。 \mathfrak{g} の支配的ウェイトの集合を P_+ で表わす。するとウェイト $\Lambda = (\ell, \lambda)$ ($\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda \in P_+$) の 可積分表現 と呼ばれる最高ウェイト既約表現 V_Λ が存在する。

これが0でない必要十分条件は

$$0 \leq (\varrho, \theta) \leq \varrho.$$

(従って、 ϱ を固定したとき、そこに現われるウェイトの集合 $P_{\varrho} \subset P_+$ は有限集合であることに注意。)

この ϱ をレベルと呼び、これは中心 c の作用が ϱId となることで特徴付けられる。

これについての詳しい話は[Kc]参照。

(3.3) 理論の基礎になるのは次の事実の成立である。証明は本質的に R 上の留数定理による。

命題. (1.12)における $W \subset (\mathfrak{g} \otimes C((\zeta))) \subset \hat{\mathfrak{g}}$ は部分代数である。(Wの元の間では、積をとったとき中心が出ない。)

定義 (3.4). (3.2)の記号を用いる。 $P^{\wedge} \in \mathcal{P}^{\wedge}$ をとる。

$$i) \quad V_{\Lambda}(P^{\wedge}) = V_{\Lambda} / WV_{\Lambda}$$

を P^{\wedge} に対応し、表現 Λ に従うゲージ条件の方程式と呼ぶ。

$$ii) \quad V_{\Lambda}^{\dagger}(P^{\wedge}) = \{v^{\dagger} \in V_{\Lambda}^{\dagger}; v^{\dagger}X = 0, \forall X \in W\}$$

を (P^{\wedge}, Λ) に対応する真空の空間と呼ぶ。ただし V_{Λ}^{\dagger} は V_{Λ} の双対表現。

命題 (3.5). $V_{\Lambda}(P^{\wedge})$ と $V_{\Lambda}^{\dagger}(P^{\wedge})$ とは互いに双対な空間である。

証明. 本質的にRiemann-Rochの定理と留数定理。

(3.6) [TUY]における証明をそのまま用いることが出来て、次の定理が得られる。

定理 (3.7). 定義(3.4)の記号を用いる。

$$V_{\Lambda}^{\dagger} = \bigcup_{P^{\wedge} \in \mathcal{P}^{\wedge}} V_{\Lambda}^{\dagger}(P^{\wedge})$$

は接続層になる。

特に $V_{\Lambda}^+(\hat{P})$ は有限次元になる。

(3. 8) さらに重要なのは次の定理である：

定理. 関手の意味で \mathcal{P} 上に直線束 L_{Λ} が存在し (determinant bundle)、自然に

$$V_{\Lambda}^+(\hat{P}) = "H^0(\mathcal{P}, L_{\Lambda})"$$

となる。

この対応は V_{Λ}^+ に平坦な接続を導く。

定理 (3. 9). 上記の接続は $\mathcal{P}^{(1)}$ 上の可積分平坦接続に下降する。

(3. 10) これらの証明は最も核心部分であって、D-加群の理論が用いられる。それらについてここで詳しく述べる余裕はない。

(3. 11) さらに [TUY]により、自明な束の所に制限すると、リーマン面のモジュラス X を動かす方向へも可積分系が出来 (Virasoro代数の作用)、従って特に真空の空間の次元は X にも依らないことが分かる。

(3. 12) UGMへの埋め込みから導かれるFock表現は上記の可積分表現の特殊な場合になる。この時真空の空間は本質的にテータ関数を用いて書かれる。

問題 (3. 13). i) Hitchinの Higgs場の理論[H1,2]によれば、 \mathcal{P} はアーベル多様体を有限被覆に持つ。これが我々の理論でどの様に見えるか？

ii) もう一つFeigin-Frenkelによって導入された臨本表現と呼ばれる重要な表現があるが [FF1,2]、そのモジュラス幾何学的意味は何か？—この理論の一般種数版。

iii) この理論のアデールの展開と数論との関係？

References

- [BK] Belavin, A.A., Knizhnik, V.G.: Complex geometry and the theory of quantum strings, *Sov. Phys. JETP*, 64(2)(1986), 214-228
- [BPZ] Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B.: Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum theory, *Nucl. Phys.*, B241(1984), 333-380
- [FF1] Feigin, B.L., Frenkel, E.V.: Representations of affine Kac-Moody algebras and bosonization, *Physics and Mathematics of Strings*, Knizhnik vol., 1990, 271-316
- [FF2] Feigin, B.L., Frenkel, E.V.: Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, *Comm. Math. Phys.*, 128(1990), 161-189
- [FS] Friedan, D., Shenker, S.: The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory, *Nucl. Phys.*, B281(1987), 509-545
- [HM] Harris, J., Mumford, D.: On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. math.*, 67(1982), 23-86
- [H1] Hitchin, N.: Stable bundles and integrable systems, *Duke Math. J.*, 54(1987), 91-114
- [H2] Hitchin, N.: Flat connections and geometric quantization, preprint
- [Kc] Kac, V.: *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1985
- [Ks] Kashiwara, M.: The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra, *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, Proc. JAMI, Johns Hopkins, 1989, 161-190
- [KNTY] Kawamoto, N., Namikawa, Y., Tsuchiya, A., Yamada, Y.: Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, *Comm. Math. Phys.*, 116(1988), 247-308
- [KZ] Knizhnik, V.G., Zamolodchikov, A.B.: Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions, *Nucl. Phys.*, B247(1984), 83-103
- [Kr] Krichever, I.M.: Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations, *Russ. Math. Surveys*, 32(1977), 185-213

- [Mm 1] Mumford, D.: An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de-Vries equation and related non-linear equations, Intern.Symp.on Alg.Geom., Kyoto, 1977, 115-153
- [Mm 2] Mumford, D.: Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, Progress in Math., 36(1983), 271-328
- [N 1] Namikawa, Y.: A conformal field theory on Riemann surfaces realized as quantized moduli theory of Riemann surfaces, Proc.Symp.Pure Math., 49(1989), Part I, 413-443
- [N 2] 2次元場の量子論の最近の発展、1988代数幾何学シンポジウム記録(城崎), 173-187, 1989
- [R 1] Ramanathan, A.: Stable principal bundles on a compact Riemann surface, Math. Ann., 213(1975), 129-152
- [R 2] Ramanathan, A.: Deformation of principal bundles on the projective line, Invent. math., 71(1983), 165-191
- [S N] 佐藤幹夫、野海正俊: ソリトン方程式と不変グラスマン多様体、上智大学講究録 18, 1984
- [TK] Tsuchiya, A., Kanie, Y.: Vertex operators in conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid group, Adv.in Pure Math., 16(1988), 297-372
- [TUY] Tsuchiya, A., Ueno, K., Yamada, Y.: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, Adv.in Pure Math., 19(1989), 459-566
- [W] Witten, E.: On quantum gauge theories in two dimensions, Comm.Math.Phys., 141(1991), 153-209
- [Y] 山田泰彦、コンフォーマルフィールド、数理科学1990年7月号