$\mathbb{A}^2$のArtin-Schreier被覆

阪大理　武田 好史 (Yoshifumi Takeda)

Kを正標数pの体とし、Lをその拡大体とする。拡大L/KがGalois拡大でそのGalois群がp次巡回群に同型であるとき、L/KはArtin-Schreier拡大であるという。このとき、LはKの単純拡大$L=K(\xi)$でその関係式は$\xi^p-\xi=f$ ($f\in K$)で与えられることが知られている。Artin-Schreier拡大の興味ある事実として次のものがある。kを正標数pの代数的閉体としてk上のアフィン空間$\mathbb{A}^n_k=\mathrm{Spec}\,k[x_1,\ldots,x_n]$及びアフィン多様体$\mathcal{X}=\mathrm{Spec}\,k[x_1,\ldots,x_n,\xi]/(\xi^p-\xi-f)$, $f\in k[x_1,\ldots,x_n]$を考える。$\xi^p-\xi-f$が既約となるようにfをとれば、関数体の拡大$k(\mathcal{X})/k(\mathbb{A}^n)$はArtin-Schreier拡大であり、射影$\mathcal{X}\to\mathbb{A}^n$はp次のエタールな有限射となる。すなわちアフィン空間の自明でない元の関数体の拡大の1つの例がArtin-Schreier拡大である。逆に代数多様体$\mathcal{X}$からアフィン空間$\mathbb{A}^n$の上へのエタールな有限射$\mathcal{X}\to\mathbb{A}^n$で関数体の拡大$k(\mathcal{X})/k(\mathbb{A}^n)$がp次のGalois

拡大になっているとき、多項式 $f(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]$ が存在して $\mathcal{X}=\mathrm{Spec}\,k[x_1,\dots,x_n,\xi]/(\xi^p-\xi-f)$ と書けることが知られている。

本稿では、アフィン平面のエタールなArtin-Schreier被覆の非特異な完備化を考えて、そのEuler数、標準因子等の数値的不変量を調べることを目標とする。

§1 準備と記号

k を正標数 p の代数的閉体とし k 上の代数曲面 $\mathcal{X}$ からアフィン平面 $\mathbb{A}^2=\mathrm{Spec}\,k[s,t]$ へのエタールな有限射 $\varphi:\mathcal{X}\to\mathbb{A}^2$ でその関数体の拡大がArtin-Schreier拡大になっているものを考える。このとき多項式 $f(s,t)\in k[s,t]$ が存在して、$\mathcal{X}=\mathrm{Spec}\,k[s,t,\xi]/(\xi^p-\xi-f)$ とかける。 f のとり方は一意ではないが次数が最小となるものを取ることとする。このようなとき $\mathcal{X}$ は f で定義されているという。斉次座標 (X,Y,Z) を持つ射影平面 $\mathbb{P}^2$ を考えて $s=X/Z$, $t=Y/Z$ により $\mathbb{A}^2\subset\mathbb{P}^2$ とみる。無限遠直線 $\{Z=0\}$ を B とする。 $d=\deg f(s,t)$ として f の斉次化 $\tilde{f}(X,Y,Z)=Z^d f(X/Z,Y/Z)$ をとる。さらに整数 m, e を $d+e=mp$, $0\leq e\leq p-1$ となるようにとる。 $\mathbb{P}^2$ 上の Gorenstein スキーム $\tilde{\mathcal{X}}$ を $\tilde{\mathcal{X}}=\mathrm{Proj}\,k[X,Y,Z,\zeta]/(\zeta^p-Z^{m(p-1)}\zeta-Z^e\tilde{f}(X,Y,Z))$

で定義し、自然な射影$\bar{\mathfrak{X}} \to \mathbb{P}^2$を$\psi$とする。　ここで$\deg X = \deg Y = \deg Z = 1$, $\deg \zeta = m$である。　一般に$\bar{\mathfrak{X}}$は正規とは限らない。　$\nu : \tilde{\mathfrak{X}} \to \bar{\mathfrak{X}}$を$\bar{\mathfrak{X}}$の正規化として$\pi = \psi \circ \nu$とおく。　さらに$\tilde{\mathfrak{X}}$の極小特異点解消を$\rho : \mathfrak{Y} \to \tilde{\mathfrak{X}}$とする。

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{\mathfrak{X}} \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dd, bend left, "\pi"] & \mathfrak{Y} \arrow[l, "\rho"'] \\
\mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \bar{\mathfrak{X}} \arrow[d, "\psi"'] & \\
\mathbb{A}^2 \arrow[r] & \mathbb{P}^2 &
\end{tikzcd}$$

次のことはすぐにわかる。

注意 1.1.　$\psi_* \mathcal{O}_{\bar{\mathfrak{X}}}$には次のような$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$－加群のフィルトレーションが存在する：

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} = \psi_* \mathcal{O}_{\bar{\mathfrak{X}}}.$$

ここで各$\mathcal{F}_i$は階数$i+1$の局所自由$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$－加群で、$\mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-imB) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-im)$となっている。　実際、各$\mathcal{F}_i$として$\{1, \zeta, \ldots, \zeta^i\}$で生成される$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$－加群をとればよい。

注意 1.2.　前注意とRiemann-Rochの定理より、

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{\mathfrak{X}}}) = p - \frac{3}{4} p(p-1)m + \frac{1}{12} p(p-1)(2p-1)m^2.$$

注意 1.3. 随伴公式より、

$$\omega_{\bar{\mathfrak{X}}} = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3+(p-1)m)。$$

§2 $\deg f \equiv 0 \pmod p$ の場合

このとき $e=0$ であり、$\bar{\mathfrak{X}} = \mathrm{Proj}\, k[X,Y,Z,\zeta]/(\zeta^p - Z^{m(p-1)}\zeta - \tilde{f})$ となっている。多項式 f とその斉次化 $\tilde{f}$ についての次の仮定を考える。

仮定 I: $\deg f(x,y) \equiv 0 \pmod p$ でかつ各点 $\mathfrak{P} \in \mathfrak{B}$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\tilde{f}, \frac{\partial}{\partial Y}\tilde{f}, \frac{\partial}{\partial Z}\tilde{f}\right)(\mathfrak{P}) \neq (0,0,0)。$$

仮定 I をみたす多項式 f により $\mathfrak{X}$ が定義されているとき、$\mathfrak{X}$ は仮定 I をみたすという。ヤコビアン判定法により次の命題が得られる。

命題 2.1 $\mathfrak{X}$ は仮定 I を満たし、$(p,m) \neq (2,1)$ であるとする。このとき $\bar{\mathfrak{X}}$ は非特異である。とくに $\bar{\mathfrak{X}} = \tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}$ が成立する。

この命題と注意 1.2, 1.3 より次が従う。

系 2.2 命題と同じ仮定の下で次の公式が成立する。

(1) $\chi(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2$。

(2) $K_{\mathcal{Y}} = (-3+(p-1)m)(\rho^*\circ\pi^* B)$,

$(K_{\mathcal{Y}}^2) = 9p - 6p(p-1)m + p(p-1)^2 m^2$。

注意2.3、$(m,p)=(1,2)$のとき、$\mathcal{X}$が仮定Iを満たしても$\mathcal{X}$はA_1型の有理二重点を持つことがある。しかしこの場合も系2.2の公式がそのまま成立する。

例2.4、標数$p=2$とする。$\deg f=6$でかつ仮定Iをみたす多項式fで$\mathcal{X}$が定義されているとする。このとき系2.2より、$K_{\mathcal{Y}}=0$がわかる。さらに注意1.1の$\psi_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$のフィルトレーションから$H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})=0$が従う。よって$\mathcal{Y}$はK3曲面である。

例2.5、標数$p=3$とする。$\deg f=3$でかつ仮定Iをみたす多項式fで$\mathcal{X}$が定義されているとする。このとき$K_{\mathcal{Y}}=(\pi\circ\rho)^*(-B)$である。よって$-K_{\mathcal{Y}}$は豊富な因子であり$(K_{\mathcal{Y}}^2)=3$となる。従って$\mathcal{Y}$は次数3のdel Pezzo曲面である。

§3 $\deg f \equiv p-1 \pmod p$の場合

このとき、$e=1$であり$\mathcal{X}=\mathrm{Proj}\, k[X,Y,Z,\zeta]/(\zeta^p - Z^{m(p-1)}\zeta - Z\hat{f})$

となっている。ヤコビアン判定法及びSerreの判定法により次が従う。

<u>補題</u> 3.1. X が $\deg f \equiv p-1 \pmod p$ であるような多項式 f で定義されているとき、$\bar{X}$ は正規である。とくに $\bar{X}=\tilde{X}$ である。さらに各 $P \in \mathbb{P}^2$ に対して次が成立する。

$$\psi^{-1}(P) \text{ が特異点} \iff P \in \{\hat{f}(X,Y,Z)=0\} \cap B .$$

多項式 f についての次の仮定を考える。

仮定 II： $\deg f \not\equiv 0 \pmod p$ であり、曲線 $\{\hat{f}(X,Y,Z)=0\}$ は被約曲線であって L と正規交叉する。

仮定 II をみたす多項式 f により X が定義されているとき、X は仮定 II をみたすという。

<u>命題</u> 3.2. X は仮定 II をみたし、$\deg f \equiv p-1 \pmod p$ であるとする。このとき $\tilde{X}$ は特異点として丁度 d コの A_{p-1} 型の有理二重点をもつ。

<u>証明</u>. 前補題より $\bar{X}=\tilde{X}$ となり、$\mathrm{Sing}(\tilde{X})=\pi^{-1}(\{\hat{f}=0\}\cap B)$

である。 $P\in\{\tilde{f}=0\}\cap B$ をとる。 f は仮定IIをみたすから、$\pi^{-1}(P)$ の近傍では $\mathcal{X}$ は $\eta^p - z^{m(p-1)}\eta = xz +$（高次の項）により定義されている。 この式から $\pi^{-1}(P)$ は A_{p-1} 型の有理二重点であることがわかる。

系3.3. 命題と同じ仮定の下で、系2.2と同じ公式が成立する。

例3.4. 標数 $p=2$ とする。 $\deg f=5$ で仮定IIをみたす多項式 f により定義された $\mathcal{X}$ を考える。 このとき $K_{\mathcal{Y}}=0$, $H^1(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})=H^1(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})=0$ が成立する。 従って $\mathcal{Y}$ はK3曲面である。

§4 $\deg f \not\equiv 0, p-1 \pmod{p}$ の場合

このとき必然的に $p\geq 3$ であり、$2\leq e\leq p-1$, $\mathcal{X}=\mathrm{Proj}\,k[X,Y,Z,\zeta]/(\zeta^p - Z^{m(p-1)}\zeta - Z^e\tilde{f})$ となる。 ヤコビアン判定法及びSerreの判定法により $\mathcal{X}$ は正規ではない。 以下、$\mathcal{X}$ は仮定IIをみたすとして、$\mathcal{X}$ の正規化 $\tilde{\mathcal{X}}$ を調べていく。 $\mathcal{X}$ は局所的には次の式で定義されている：

$$\eta^p - z^{m(p-1)}\eta - z^e\tilde{f}(x,1,z)=0$$

すなわち　　$\eta^p = z^e(\tilde{f}(x,1,z) + z^{m(p-1)-e}\eta)$。

まず $\tilde{f}(P) \neq 0$ なる点 $P \in B$ をとる。このとき $\pi^{-1}(P) \in \tilde{X}$ の近くを調べることは $\eta^p = z^e$ の正規化を調べることに等しい。整数 a, b を $ap + be = 1$ となるようにとり、$\tau = \eta^b z^a$ とおく。すると $\tau^e = \eta$, $\tau^p = z$ であり、従って $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_P = (\psi_* \mathcal{O}_{\bar{X}})_P[\tau]$ であることがわかる。とくに $\tilde{X}$ は $\pi^{-1}(P)$ で非特異である。

次に、$\tilde{f}(Q) = 0$ なる点 $Q \in B$ をとる。f は仮定 II をみたしているから $\pi^{-1}(Q) \in \tilde{X}$ の近くを調べることは、$\eta^p = z^e x$ の正規化を調べることに等しい。$T^p = z$, $S = \eta / T^e$ とおくと、$S^p = x$ である。$k[[S,T]]$ 上の導分 $\delta = T\frac{\partial}{\partial T} + hS\frac{\partial}{\partial S}$ を考える。ここで $h = p - e$ である。δ の不変部分環 $k[[S,T]]^{\delta} = \{g \in k[[S,T]] \mid \delta(g) = 0\}$ をとると、これは正規であり、$k[[S,T]]^{\delta} \ni z, \eta, x$ である。つまり $k[[S,T]]^{\delta}$ が求める正規化である。一方、次の事実が知られている。

補題 4.1. (1) $k[[S,T]]^{\delta} = k[[S,T]] \cap k((S^p, T^p, S/T^h)))$。

(2) $\{S^{\alpha} T^{\beta} \mid \beta + h\alpha \equiv 0 \pmod{p}\}$ は $k[[S,T]]^{\delta}$ の k-基底である。

(3) $\mathrm{Spec}\, k[[S,T]]^{\delta}$ は孤立特異点をもちその極小な解消の双対グラフは次で与えられる:

$$\overset{-a_1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{-a_2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\ \cdots\ -\!\!-\!\!-\overset{-a_g}{\circ}\ .$$

ここで o は非特異有理曲線を表し、

$$\frac{p}{n} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_g}}}$$

$a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geqq 2$ である。 とくに特異点は有理的である。

次の定理は上の考察及び補題を用いて示される。

定理 4.2. X が仮定II をみたし、$\deg f \not\equiv 0, p-1 \pmod p$ なる多項式で定義されているとき、次の $\mathbb{P}^2$ 上の完全列がある:

$$0 \longrightarrow \psi_* \mathcal{O}_{X} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathcal{O}_B(\alpha - \beta m) \longrightarrow 0\ .$$

ここで α と β は $0<\alpha<e$, $0<\beta<p$, $-\alpha p+\beta e>0$ なる整数全体を渉る。

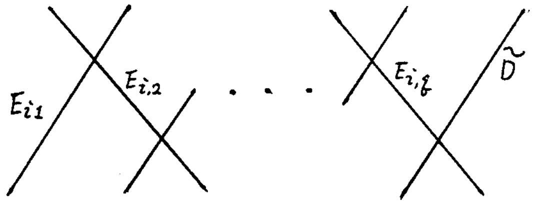
証明略。

補題 4.1 より $\tilde{X}$ の特異点はすべて有理的であるから $\chi(\mathcal{O}_{Y}) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ となる。 よって次の系が従う。

系4.3、定理と同じ仮定、同じ記号の下で次が成立する：

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2 + \Sigma_{\alpha,\beta}(\alpha-\beta m+1)$$ 。

Yの標準因子を記述するために、いくつかの記号を用意する。πによるBの$\tilde{X}$への集合論的逆像をDと　さらにρによるDの固有変換を$\tilde{D}$とする。このとき$\tilde{D}$は非特異有理曲線となる。$\{Q_1,\dots,Q_d\}$をπによる逆像が$\tilde{X}$の特異点となる$\mathbb{P}^2$の点全体からなる集合とする。補題4.1より$(\pi\circ\rho)^{-1}(Q_i)$は次のような配置となる：



。

ここでE_{ij}は非特異有理曲線でその自己交点数は$-a_j$である（a_jについては補題4.1.(3)参照）。さらに次のものを考える：

$$\delta_j = \det\begin{pmatrix} a_{j+1} & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & a_g \end{pmatrix} \qquad (0 \leqq j \leqq g-1),$$

$$\delta_g = 1,$$

$$\delta^j = \det\begin{pmatrix} a_1 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & a_{j-1} \end{pmatrix} \qquad (2 \leqq j \leqq g+1),$$

$$\delta^1 = 1。$$

このとき、$\delta_0 = \delta^{g+1} = p$ であって、$\delta_{j-1} = a_j\delta_j - \delta_{j+1}$ $(1 \leqq j \leqq g-1)$, $\delta^{j+1} = a_j\delta^j - \delta^{j-1}$ $(2 \leqq j \leqq g)$ が成立する。

<u>定理</u> 4.4　上の仮定及び記号の下で

$$K_{\mathfrak{Y}} = N\tilde{D} + \Sigma_{j=1}^{g}(\Delta_j + N\delta^j/p)(E_{1j} + \cdots + E_{dj})。$$

ここで $N = (-3 + m(p-1))p - (p-1)(e-1)$, $\Delta_j = \frac{1}{p}(\delta_j + \delta^j) - 1$ $(1 \leqq j \leqq g)$ である。

証明略。

$(\tilde{D}^2) = -\delta^g m + \frac{1}{p}(1 + ge)$ に注意すれば次の系が直ちに従う。

系 4.5.　同じ仮定及び記号の下で

$$(K_{\mathfrak{Y}}{}^2) = \frac{1}{p}\{N^2 - (mp-e)\{\delta_1 + \delta^g - 2 - 2p + (a_1 + \cdots + a_g)p - 2pg\}\}。$$

ただし $N^2 = \{(e+2)p - (e-1)\}^2 - 2(p-1)p\{(e+2)p - (e-1)\}m + p^2(p-1)^2m^2$ である。

例4.6. $\mathscr{X}=\mathrm{Spec}\, k[s,t,\xi]/(\xi^p-\xi-s)$ とする。このとき $d=1$, $m=1$, $e=p-1$ である。明らかに仮定Ⅱをみたす。定理4.2, 4.4及びそれらの系により、$\chi(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}})=1$, $K_{\mathscr{Y}}=-(p-2)\tilde{D}-2E$, $(E^2)=-p$, $(K_{\mathscr{Y}}^2)=8$。つまり$\mathscr{Y}$は次数8の有理線織曲面である。

例4.7. 標数 $p=3$ とする。仮定Ⅱをみたし $\deg f=4$ なる多項式 f で $\mathscr{X}$ は定義されているとする。このとき、$\chi(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}})=2$, $K_{\mathscr{Y}}=\tilde{D}$, $(K_{\mathscr{Y}}^2)=-1$ となっている。$\theta:\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$ を $\tilde{D}$ のブローダウンとすると、$\mathscr{Z}$ はK3曲面となる。

§5 補足

この節では、$\mathscr{X}$ は仮定Ⅰまたは仮定Ⅱをみたすとして、$\mathscr{Y}$ の数値的不変量についていくつかの結果を証明なしで述べる。まず、$\mathscr{Y}$ の第1 Betti数 $b_1(\mathscr{Y})=\mathrm{rank}\, H^1_{et}(\mathscr{Y},\mathbb{Q}_\ell)$ について次の命題が成立する。

命題5.1. $\mathscr{X}$ を定義する多項式 f の次数が十分大きいとき、$b_1(\mathscr{Y})=0$ となる。

$\deg f(x,t) \equiv 0, 1, p-1 \pmod{p}$ のときはさらに強く次のことがいえる。

<u>命題</u> 5.2. $\mathcal{X}$ を定義する多項式 f が次の(i)または(ii)をみたすとする:

(i) $\deg f(x,t) \equiv 0, p-1 \pmod{p}$;

(ii) $\deg f(x,t) \equiv 1 \pmod{p}$ かつ $m \geq p-1$ 。

このとき $H^1(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = 0$ となる。

また $\mathcal{Y}$ の Chern 類 c_1^2, c_2 の関係については次のことがいえる。

命題 5.3. $$\lim_{d\to\infty} \frac{c_1(\mathcal{Y})^2}{c_2(\mathcal{Y})} = \frac{p-1}{p} 。$$

文　　献

Y. Takeda, Etale Galois coverings of degree p of the affine plane, to appear in J. Algebra.